



**HAL**  
open science

# La Substance de Spinoza ou la Nature comme Treillis. Une histoire de point fixe.

Mohammed Bachir

► **To cite this version:**

Mohammed Bachir. La Substance de Spinoza ou la Nature comme Treillis. Une histoire de point fixe.. 2017. hal-01420747v2

**HAL Id: hal-01420747**

**<https://paris1.hal.science/hal-01420747v2>**

Preprint submitted on 8 Jul 2017 (v2), last revised 11 Mar 2018 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La Substance de Spinoza ou la Nature comme Treillis. Une histoire de point fixe.

Par Mohammed Bachir en hommage à Baruch de Spinoza.

15/12/2013

**Résumé :** On propose un modèle mathématique basé sur deux axiomes et la théorie des ensembles pour approcher la problématique développée par le philosophe B. Spinoza, dans *l'Ethique*. On utilise ensuite le Théorème de Knaster-Tarski pour démontrer l'existence et l'unicité de la Substance affirmée par Spinoza.

## 1 Introduction

Vers 1661, dans l'œuvre de *l'Ethique* (Voir [2]), Baruch de Spinoza commence par définir la notion de “*cause de soi*” et celle de “*substance*”. Par “*cause de soi*” il entend, ce dont l'essence enveloppe l'existence, ou encore ce dont la Nature ne peut être conçue qu'existente. Par substance, ce qui est en soi et est conçu par soi, autrement dit, ce dont le concept n'a pas besoin du concept d'une autre chose pour être formé. Il affirme ensuite qu'il appartient à la nature de la substance d'exister (Voir les définitions I et II ainsi que la Proposition VII dans *l'Ethique* [2]). Le philosophe met en place sept axiomes sur lesquels il va s'appuyer tout le long de la première partie de l'œuvre pour démontrer (selon ce qu'il appelle lui même la méthode géométrique) l'existence et l'unicité d'une substance dans la Nature (Voir Proposition XI de *l'Ethique*). Autrement dit de l'existence d'une unique chose dans la Nature qui est cause de soi. Cependant, Spinoza est amené à aborder la notion de substance via ses attributs. Le seul moyen pour lui de percevoir la substance par l'entendement. Quoique le raisonnement qu'on trouve dans *l'Ethique* est souvent rigoureux et l'intuition est profonde, certaines preuves présentent néanmoins quelques lacunes à certains endroits comme le démontre George Boole dans son œuvre “les lois de la pensée” (voir [1], voir aussi “*La raison systématique*” de Daniel Parrochia [6]). Ces difficultés s'expliquent à mon sens en deux points :

1. la première difficulté est due au fait de raisonner directement sur la Substance qui par définition échappe à l'entendement et pousse à s'accrocher aux attributs de la Substance, ce qui peut induire des erreurs et des confusions.

2. la seconde difficulté est due à l'absence d'une théorie mathématique des ensembles à cette époque. Même si on trouve déjà dans l'argumentation de Spinoza une distinction entre deux types d'infini : "*l'infini en son genre*" et "*l'absolument infini*", la théorie des ensembles n'avait pas pour autant démarré. Notons au passage que c'est à Georg Cantor que l'on doit, deux siècles plus tard vers 1874, les premières bases de la théorie des ensembles. Voici un passage de *l'Ethique* (Voir page 324 dans [2]) où Spinoza critique ses adversaires. Ce passage montre clairement que la théorie des ensembles et la notion d'ordinaux n'étaient pas encore au point mais faisaient toutefois partie des débats :

*“Si la substance corporelle, disent-ils, est infinie, qu'on la conçoive divisée en deux parties : chaque partie sera ou finie ou infinie. Si chaque partie est finie, l'infini se compose donc de deux parties finies, ce qui est absurde. Si chaque partie est infinie, il y a donc un infini deux fois plus grand qu'un autre infini, ce qui est également absurde. En outre, si une quantité infinie est mesurée en parties valant chacune un pied, elle devra consister en une infinité de telles parties ; et de même, si elle est mesurée en parties valant chacune un pouce ; par suite, un nombre infini sera douze fois plus grand qu'un autre nombre infini...”*

La présente note trouve sa source d'inspiration dans l'œuvre de *l'Ethique*. Ayant constaté que le raisonnement de Spinoza s'appuie en partie sur des concepts ensemblistes, je propose dans ce qui suit un modèle mathématique simple issu de la théorie des ensembles et basé sur deux axiomes sur la loi de la causalité (en dehors des axiomes classiques de la théorie des ensembles) qui approche la problématique de Spinoza (Voir la Section 2 et la Section 4). Cependant, contrairement à Spinoza, j'appelle "*Nature*"  $N_t$  à un instant  $t$ , uniquement l'univers de toutes les choses  $A$  qui existent ou ayant existé avant l'instant  $t$  et qui ne coïncident pas avec leur propre cause (un principe fondamentale de la physique). Je définis ensuite formellement  $E_t$  comme étant l'ensemble de toutes les choses existantes ou ayant existé avant l'instant  $t$ , englobant ainsi éventuellement les choses qui coïncideraient avec leurs propres causes si toutefois ces choses là avaient été amenées à exister. Par ailleurs, une fois que les objets traités seront bien définis, la modélisation et les axiomes seront bien posés, les preuves seront purement mathématiques.

Évidemment, on a toujours que  $N_t$  est une partie de  $E_t$ , pour tout instant  $t$ . La première question qui se pose alors est la suivante : A-t-on que  $E_t = N_t$  ou bien  $N_t$  strictement inclus dans  $E_t$ ? Je démontrerai en m'appuyant sur ces deux axiomes, qu'il existe nécessairement une unique chose non vide  $S$  dans  $E_t$  qui existe en soi. Autrement dit, il existe une unique chose qui est cause de soi, c'est-à-dire dont l'existence et la cause ne font qu'un. Il appartient donc à la nature de cette chose d'exister : C'est la Substance de Spinoza. Je prouverai par la même occasion que  $S$  est indépendante du temps et que pour tout instant  $t$  on a

en fait  $E_t = N_t \cup \{S\}$ . Notons, que dans les Propositions XII et XIII de *l'Ethique*, Spinoza affirme que la substance est indivisible. Il sera aussi prouvé dans cette note que  $S$  est effectivement indivisible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose pas en deux (ou plusieurs) parties disjointes (Voir Proposition 5 en Section 2).

Il est à noter que la Substance  $S$  établis dans cette note, apparaît comme extérieur à la Nature  $N_t$  à chaque instant  $t$ , alors que chez Spinoza la notion de Nature doit plutôt coïncider avec  $E_t$  dans sa globalité à chaque instant  $t$ . Il est à noter aussi que contrairement à Spinoza qui cherche à connaître la substance par son essence et ses attributs, on ne prétend pas dans cette note expliquer de quoi est faite la nature de cette substance. Il est uniquement question de prouver formellement et grâce à des outils mathématiques qu'elle existe et qu'elle est unique. L'idée est quelque peu similaire à l'exemple suivant : dans un langage fini (un dictionnaire par exemple) où l'on admet que tout mot doit avoir une définition unique, il est alors nécessaire qu'il y ait au moins un mot qui est sa propre définition s'il l'on veut éviter de définir un premier mot par un deuxième et puis ce même deuxième par le premier, autrement dit si l'on veut éviter que la chaîne des définitions fasse une boucle. En terme de causalité, il est admis de tous que le temps n'est pas cyclique. En d'autres termes, le fait que l'effet ne précède jamais sa cause est un principe fondamentale sur lequel repose toute la physique.

La preuve que j'apporterai reposera sur le théorème de Knaster-Tarski qui est un résultat mathématique de la théorie des points fixes dû aux mathématiciens, Knaster [5] (1928) et Tarski [7] (1955). Ce résultat est également attribué par Y. N. Moschovakis [4] à Zermelo. L'intérêt de l'approche développée dans cette note, c'est qu'elle permet de revisiter *l'Ethique* de Spinoza via les mathématiques moderne que l'époque de Spinoza ignorait, tout en confirmant les thèses soutenues par ce dernier dans les Propositions XI, XII, XIII et XIV de *l'Ethique*.

Voici les deux premiers axiomes que je propose.

(A1) Toute chose existante est l'effet d'une cause bien déterminée (toujours sous entendue non vide) et l'effet ne peut pas précéder sa cause. ( voir aussi les axiomes de *l'Ethique*).

*Explication : C'est un principe fondamental de la physique.*

(A2) La cause du tout doit envelopper la cause de la partie. (cet axiome ne se trouve pas explicitement dans *l'Ethique*).

*Explication : Cet axiome dit que si une chose enveloppe une autre alors la cause de la première enveloppe la cause de la seconde. Lorsqu'une chose est considérée comme composée de plusieurs parties, sans chacune des parties le tout ne peut pas exister. Donc la cause d'une partie est contenue dans la cause du tout. Par*

*exemple, la cause d'une page d'un livre fait partie de la cause du livre vue que sans ses pages, le livre ne peut exister.*

Grâce aux deux axiomes (A1) et (A2) et une modélisation mathématique simple, on prouvera dans la Proposition 3 que :

**L'existence de la substance :** *Il existe une substance  $S$  dans le monde de l'existant. Tout autre substance (si elle existe), contiendrait la substance  $S$ . Autrement dit,  $S$  est la plus petite substance contenue dans tout autre substance s'il y a plusieurs substances.*

Je rappelle à ce niveau que Spinoza énonce directement à partir de la définition d'une substance, la Proposition II de *l'Ethique* : "*Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien en commun entre elles*". Si on admet cette proposition comme étant intuitivement vraie, on en tire directement l'unicité de la substance. Car d'après ce que j'ai énoncé plus haut (ce qui sera prouvé ultérieurement), toute autre substance si jamais elle existait, contiendrait en elle la substance  $S$  qui existe nécessairement. Or si deux substances différentes ne doivent rien avoir en commun, sachant qu'elles ont toutes  $S$  en commun c'est qu'en fait, il n'y a pas d'autre substance que  $S$ . Ainsi on aura fini avec l'existence et l'unicité de la substance  $S$  à partir uniquement des deux axiomes (A1) et (A2). Quoique la Proposition II de *l'Ethique* est intuitivement et philosophiquement convaincante, elle a des limites d'un point de vue de la rigueur mathématique. Etant donné le but fixé dans cette note, c'est-à-dire d'apporter des preuves rigoureusement mathématiques, je suggère l'introduction d'un autre axiome dont la philosophie peut certainement s'en passer. On peut donc admettre (et c'est ce qui sera fait plus tard) un autre axiome utilisé à plusieurs reprises par Spinoza mais sans toutefois être énoncé comme tel. En effet, il faut noter qu'il est implicitement admis comme évidence par Spinoza que tout ce qui fait partie d'une substance doit être aussi cause de soi. Ainsi par exemple, chacun des attributs d'une substance est pour Spinoza nécessairement cause de soi, quoique ces attributs soient différents les uns des autres, puisqu'il en existe une infinité (Voir Proposition X de *l'Ethique*). Cela semble intuitivement clair, mais mathématiquement parlant cela nécessite un axiome explicite. Car, *a priori* ce n'est pas parce qu'une chose est globalement cause de soi, que toutes ses parties sont aussi cause de soi. Évidemment pour Spinoza, la substance est indivisible, mais cela est prouvé postérieurement et ce n'est pas un fait admis *a priori*. Je propose, donc l'axiome suivant qui semble *a priori* moins fort puisque je demande juste à ce que toute partie d'une substance doit envelopper en elle la cause de quelque chose sans pour autant exiger qu'elle enveloppe sa propre cause. Autrement dit, dans une substance tout est cause de quelque chose et le tout est cause de soi. Évidemment, si toute partie d'une substance enveloppe sa propre cause, alors l'axiome est en particulier vérifié (c'est ce qui arrivera mais *a posteriori*). Cet axiome permettra de prouver que non seulement la substance est unique mais qu'elle est aussi indivisible. Voici donc l'axiome :

(A3) Toute partie non vide d'une substance doit envelopper une cause.

*Explication : Cet axiome revient à dire, que toute partie d'une chose qui est cause de soi, doit contenir en elle la cause de quelque chose. Une substance est par définition cause de soi. Admettons qu'il existe une partie de cette substance qui n'est cause ni d'elle même ni d'aucune autre chose. Cette partie serait donc causée par sa partie complémentaire dans la substance qui ne coïncide pas avec la totalité de la substance. Mais comme la première partie n'a aucun effet dans la substance, cette substance ne serait donc pas cause de soi mais serait plutôt causée par la deuxième partie strictement incluse en elle. Ceci contredit la définition d'être cause de soi, autrement dit d'être une substance.*

Si on assume donc l'axiome (A3) en plus des axiomes (A1) et (A2), voici alors ce qu'on démontrera (voir Proposition 5) :

**Unicité et indivisibilité de la substance :** *Il existe une unique substance indivisible  $S$  dans le monde de l'existant.*

Notons qu'à partir de ce qu'on vient d'énoncer, on déduit le caractère infini de la substance et ceci découle immédiatement de la définition donnée par Spinoza, c'est-à-dire que la substance  $S$  n'est pas contenue dans une autre substance de même nature. C'est clairement le cas puisqu'il n'y a pas d'autre substance que  $S$ . Le fait que  $S$  soit une *cause première* sera démontré dans le Corollaire 1, une fois qu'on s'accorde à définir la *cause première* comme étant la cause contenue dans toutes les autres causes.

La démarche qui sera suivit dans les prochaines sections se résume ainsi : En admettant les trois axiomes (A1), (A2) et (A3) ainsi qu'une modélisation mathématique, on partira du multiple c'est-à-dire de la diversité des êtres de l'existence, pour arriver via les mathématiques à l'Un et l'unique c'est-à-dire à la substance.

## 2 Une modélisation mathématique.

Commençons par modéliser le temps par la droite réelle notée  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 Quelques notations et définitions.

Pour chaque instant  $t \in \mathbb{R}$  arbitrairement fixé :

- on appelle cause d'une chose  $A$ , la chose qui a fait ou qui fait que  $A$  existe ou a existé.
- on dit qu'une chose a une cause en dehors d'elle même, si cette chose ne coïncide pas avec sa cause.

- on note  $N_t$  la Nature avant l'instant  $t$ , autrement dit l'ensemble de tous ce qui peut être considéré comme un "être" ou un "objet" ayant existé avant l'instant  $t$  et qui ne coïncide pas avec sa propre cause.

- on note  $E_t$  l'ensemble de tous ce qui peut être considéré comme un "être" ou un "objet" existant avant l'instant  $t$ . On a toujours que  $N_t \subset E_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par "chose", on désigne toute partie de  $E_t$  c'est-à-dire un sous ensemble de  $E_t$  qui peut toutefois être un singleton.

- par  $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$  on désigne l'ensemble de toutes les parties de  $E_t$  muni de l'ordre de l'inclusion.

- on note  $\mathcal{C}(A)$  la cause bien déterminée de  $A$ , pour tout  $A \in \mathcal{P}(E_t)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathcal{C}(A)$  peut dépendre de l'instant  $t$ , en revanche la loi de causalité  $\mathcal{C}$  est supposée être immuable, autrement dit est indépendante du temps. La cause d'un élément  $x \in E_t$  est tout simplement la cause de  $\{x\} \in \mathcal{P}(E_t)$ .

- on appelle substance toute partie  $S \subset E_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) qui coïncideraient avec sa propre cause, c'est-à-dire  $\mathcal{C}(S) = S$  si toutefois une telle chose existe.

- on note par  $E$ , le monde de l'existant c'est-à-dire  $E = \cup_{t \in \mathbb{R}} E_t$ .

- on note  $e$  la chose commune à tout ce qui existe. Autrement dit, la chose contenue dans toute autre chose de  $E_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  c'est-à-dire

$$e := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcap_{A \subset E_t} A.$$

Cet ensemble  $e$  est appelé en mathématiques l'ensemble vide et est noté  $\emptyset$  ou  $\{\}$ . Cependant, nous gardons pour l'instant la notation  $e$  au lieu de  $\emptyset$ , mais nous précisons que  $e$  a exactement les mêmes propriétés mathématiques que  $\emptyset$ . Notons juste que l'ensemble  $e$  c'est-à-dire l'ensemble vide, peut ici avoir deux interprétations équivalentes. La première désigne par la négation "*l'absence de choses commune*" à ce qui existe dans  $E_t$  d'où la notation de  $e$  par  $\emptyset$ . Mais la deuxième interprétation désigne par l'affirmatif "*la diversité des êtres*" dans  $E_t$ . Dire que la chose commune  $e$  dans  $E_t$  est vide autrement dit est inexistante, revient à dire que les êtres dans  $E_t$  sont divers. L'ensemble  $e$  aurait donc pu tout aussi bien être noté "*d*" comme diversité.

On rappelle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$  est un treillis complet (et même une algèbre de Boole complète) qui admet un plus petit élément  $e = \emptyset$  et un plus grand élément  $E_t$ . L'introduction de l'ensemble  $\mathcal{P}(E_t)$  se justifie par les passages suivant que l'on trouvera dans *l'Ethique* [2] pages 315-316 :

1. *Que la vraie définition de chaque chose n'enveloppe et n'exprime rien à part la nature de la chose définie. D'où il suit :*

2. *Que nulle définition n'enveloppe et n'exprime aucun nombre déterminé d'individus, puisqu'elle n'exprime rien d'autre que la nature de la chose définie. Par exemple, la définition du triangle n'exprime rien d'autre que la simple nature du triangle, mais non quelque nombre déterminé de triangles.*

3. *Il faut noter que, de chaque chose existante, il est nécessairement donné quelque cause déterminée, par laquelle elle existe.*

4. Il faut enfin noter que cette cause par laquelle certaine chose existe doit, ou bien être contenue dans la nature même et la définition de la chose existante (parce que, en effet, il appartient à sa nature d'exister), ou bien être donnée en dehors d'elle.

Cela posé, il suit que, s'il existe dans la Nature quelque nombre déterminé d'individus, une cause doit nécessairement être donnée pourquoi ces individus existent, et pourquoi ni un plus grand nombre ni un plus petit.

Ce dernier passage exprime le fait que les causes respectives de deux individus  $\{a\}$  et  $\{b\}$ , n'enveloppent pas la cause de la paire d'individus  $\{a, b\}$ . Autrement dit, il est possible que  $\mathcal{C}(\{a\}) \cup \mathcal{C}(\{b\}) \subset \mathcal{C}(\{a, b\})$  mais que  $\mathcal{C}(\{a, b\}) \neq \mathcal{C}(\{a\}) \cup \mathcal{C}(\{b\})$ . Il fallait donc prendre en considération l'ensemble des parties des êtres ou objets existants, ce qui a motivé l'introduction de  $\mathcal{P}(E_t)$ . Il faut aussi noter que si deux choses n'ont rien en commun entre elles, c'est qu'il y a une cause non vide et bien déterminée à cela. Ceci explique entre autre pourquoi la cause du vide ne peut pas être vide.

## 2.2 Traduction mathématique des deux premiers axiomes.

Commençons par traduire mathématiquement les axiomes (A1) et (A2).

(A1) Toute chose existante est l'effet d'une cause bien déterminée (toujours sous entendue non vide) et l'effet ne peut pas précéder sa cause. Autrement dit, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $A \in \mathcal{P}(E_t)$ , il existe une cause unique  $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{P}(E_t)$ . Cela signifie que la loi de causalité  $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t)$  est une application, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

(A2) La cause du tout doit envelopper la cause de la partie. Cela signifie que pour deux choses existantes, si l'une enveloppe l'autre alors la cause de la première enveloppe la cause de la seconde. Autrement dit : pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $A, B \in \mathcal{P}(E_t)$ , si  $A \subset B$  alors  $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$ . Cela signifie que la loi de causalité  $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t)$  est une application croissante, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 Deux premières propositions fondamentales.

**A) Le sens de l'ensemble  $e$  :** Rappelons que l'ensemble contenu dans tout les sous ensembles non vide  $A$  de  $E_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  s'écrit

$$\emptyset = e := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcap_{A \subset E_t} A,$$

et consiste en l'intersection de tous les sous ensembles non vide  $A$  de  $E_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), ce qui abouti sur l'ensemble vide. Comme les êtres de  $E_t$  sont différents les uns des autres, dire par exemple que  $e = \{x\} \cap \{y\}$  équivaut tout simplement à dire que  $x \neq y$ , pour tout  $x, y \in E_t$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Ainsi, évoquer l'ensemble vide  $e$  revient à faire référence à la diversité des êtres dans  $E_t$ . En effet,  $e$  n'a



de sens ici que parce qu'il existe des êtres différents dans  $E_t$ . On peut donc dire que  $e$  autrement dit l'ensemble vide, exprime la diversité des êtres dans  $E_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . De ce fait, parler de la cause de  $e$  revient à parler de la cause de la diversité des êtres :  $\mathcal{C}(e) :=$  " La cause de la diversité des êtres de  $E_t$  pour  $t \in \mathbb{R}$ ". En conséquence, on a que  $\mathcal{C}(e) \neq e$  vue qu'il doit exister par l'axiome (A1) une cause bien déterminée (sous entendu non vide) à cette diversité des êtres, puisque cette diversité est bien une réalité existante dans  $E_t$  pour chaque instant  $t \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, il doit exister une cause bien déterminée et non vide qui explique pourquoi il existe des choses différentes dans le monde de l'existant et non pas une unique chose. On obtient ainsi la première proposition.

**Proposition 1.** *On a que  $\mathcal{C}(e) \neq e$  ou, ce qui revient au même  $\mathcal{C}(\emptyset) \neq \emptyset$ . Autrement dit, la cause de la diversité des êtres de  $E_t$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , est non vide.*

L'explication du sens de cette proposition a été livré plus haut et sa démonstration repose comme je l'ai mentionné sur l'axiome (A1). On peut cependant en donner une autre démonstration de la manière suivante :

*Démonstration 2.* : De par la définition même de l'ensemble vide c'est qu'il est dépourvu de toute chose et donc dépourvu de toute cause. Ce qui est dépourvu de toute cause ne peut être une cause (même pas de lui même).  $\square$

On peut aussi fournir une troisième démonstration, qui cette fois repose l'axiome VII de *l'Ethique* qui stipule que : "*tout ce qui peut être conçu comme non existant, son essence n'enveloppe pas l'existence*". Autrement dit, tout ce qui peut être conçu comme non existant, ne peut être cause de soi. Or ici  $e = \emptyset$  exprime le fait que ce qui est commun à toutes les choses de  $E_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) est inexistant. D'où  $\mathcal{C}(e) \neq e$  par cet axiome VII de Spinoza. Notons encore une dernière fois, que l'ensemble vide  $e = \emptyset$  prend sens dès qu'il existe au moins deux êtres différents dans  $E_t$  pour un certain instant  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, dire que la chose commune à tout ce qui existe est inexistante revient à dire que les choses existantes sont diverses dans leur ensemble et ceci doit avoir une cause bien déterminée et non vide qui l'explique.

**B) La cause de la diversité est contenue dans toutes les causes.** Sans trop m'attarder sur l'aporie de "l'Un et le multiple", je reprend ici la formule de Hegel sur l'identité :

*"L'identité c'est l'identité de l'identité et de la non-identité."*

Autrement dit, ce qui fait qu'une chose est, c'est à la fois ce qu'elle est et ce qu'elle n'est pas. Cette formule trouve toute sa légitimité en terme de causalité en lien avec l'axiome (A2) proposé dans cette note. Partant de la formule de Hegel adapté à la causalité, on peut expliquer philosophiquement ce qui se déduira mathématiquement de l'axiome (A2), c'est-à-dire, pourquoi la cause de la diversité, autrement dit  $\mathcal{C}(e)$ , doit être contenue dans toutes les causes. En effet, pour qu'un

être  $x$  soit différent d'un autre être  $y$ , il est nécessaire que la cause  $\mathcal{C}(\{x\})$  qui précède  $x$ , contient en elle la raison qui explique pourquoi  $x$  existera et pourquoi il sera différent de  $y$ . En d'autre terme,  $\mathcal{C}(x \neq y) = \mathcal{C}(e = \{x\} \cap \{y\}) = \mathcal{C}(e)$  doit être contenu dans  $\mathcal{C}(\{x\})$ . Donc, la cause de  $x$  c'est-à-dire  $\mathcal{C}(\{x\})$ , doit contenir en elle non seulement ce qui fera  $x$  mais aussi ce que  $x$  ne sera pas. C'est uniquement ainsi qu'on peut expliquer pourquoi  $x$  existe et pourquoi il est différent des autres êtres. Ce raisonnement s'étend bien entendu à toute partie  $A \neq \emptyset$  de  $E_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) qui n'est pas nécessairement un singleton. Ainsi, on obtient la proposition suivante dont la preuve mathématique repose tout simplement sur l'axiome (A2) :

**Proposition 2.** *Supposons que l'axiome (A2) est satisfait. Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $A \in \mathcal{P}(E_t)$ . Alors,  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$ . Autrement dit, la cause de la diversité des êtres (c'est-à-dire la cause de  $e = \emptyset$ ) est contenu dans toutes les causes.*

*Démonstration.* Partons de l'axiome (A2), comme  $e \subset A$  pour tout  $\emptyset \neq A \subset E_t$  ( $t \in E_t$ ) et que la loi de causalité est croissante, alors  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$ . □

### 3 Le théorème de Knaster-Tarski.

Le théorème de Knaster-Tarski qu'on utilisera plus loin, est un résultat bien connu de la théorie des ensembles. Il concerne l'existence de points fixes pour une application croissante d'un treillis complet dans lui même. On donnera plus bas son énoncé ainsi qu'une démonstration. On commence par rappeler ci-dessous quelques notions bien connues concernant les treillis.

**Treillis :** Un treillis  $(T, \leq)$  est la donnée d'un ensemble  $T$  et d'une relation notée  $\leq$  (appelée ordre partiel) satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1)  $\forall x \in T, x \leq x$ .
- (2)  $\forall x, y \in T$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq x$  alors  $x = y$ .
- (3)  $\forall x, y, z \in T$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$ .

**Treillis complet :** Un treillis complet  $(T, \leq)$  est un treillis pour lequel toute partie  $A$  de  $T$  admet une borne supérieure notée  $\sup(A) \in T$  et une borne inférieure notée  $\inf(A) \in T$ . Autrement dit :

- (i)  $\forall a \in A, a \leq \sup(A)$  (respectivement  $\inf(A) \leq a$ ),
- (ii) s'il existe  $M \in T$  tel que  $\forall a \in A, a \leq M$  alors  $\sup(A) \leq M$  (respectivement s'il existe  $m \in T$  tel que  $\forall a \in A, m \leq a$  alors  $m \leq \inf(A)$ )

**Exemple :** Soit  $E$  un ensemble non vide et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Alors  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  est un treillis complet, où  $\subset$  désigne l'inclusion.

On rappelle ci-dessous le théorème de Knaster-Tarski.

**Lemma 1. (Knaster-Tarski)** Soit  $(B, \leq)$  un Treillis complet et  $\mathcal{C} : B \rightarrow B$  une application croissante pour l'ordre  $\leq$ . Alors, il existe  $\omega, \theta \in B$  tel que :

$$\mathcal{C}(\omega) = \omega, \quad \mathcal{C}(\theta) = \theta$$

et pour tout ensemble  $\lambda \in B$  tel que  $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$  on a

$$\omega \leq \lambda \leq \theta.$$

*Preuve :* • **Le plus petit point fixe :** Posons  $I := \{a \in B : \mathcal{C}(a) \leq a\}$ . Comme  $B$  est un Treillis, il contient l'élément  $\omega := \inf(I)$ . Comme  $\omega \leq a$  pour tout  $a \in I$ , la croissance de  $\mathcal{C}$  entraîne que  $\mathcal{C}(\omega) \leq \mathcal{C}(a)$  et comme  $a \in I$  alors  $\mathcal{C}(\omega) \leq a$  et ceci pour tout  $a \in I$ , il s'en suit que  $\mathcal{C}(\omega) \leq \inf(I) = \omega$ . On conclut que  $\omega \in I$ . Posons maintenant  $\varpi := \mathcal{C}(\omega)$ . On a donc  $\varpi \leq \omega$ . La croissance de  $\mathcal{C}$  entraîne que  $\mathcal{C}(\varpi) \leq \mathcal{C}(\omega) := \varpi$ . D'où  $\varpi \in I$ . Puisque  $\omega$  est le plus petit élément de  $I$  alors  $\omega \leq \varpi$ . Comme on avait déjà établi l'inégalité inverse alors  $\varpi = \omega$  c'est-à-dire  $\mathcal{C}(\omega) = \omega$ . D'où l'existence d'un point fixe. Soit maintenant un élément  $\lambda \in B$  tel que  $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$ . On a en particulier que  $\lambda \in I$  et donc  $\omega \leq \lambda$ . L'élément  $\omega$  est donc le plus petit point fixe de  $\mathcal{C}$ .

• **Le plus grand point fixe :** Soit maintenant  $J := \{a \in B : a \leq \mathcal{C}(a)\}$ . Comme  $B$  est un Treillis, il contient l'élément  $\theta := \sup(J)$ . Alors  $a \leq \theta$  pour tout  $a \in J$  et par la croissance de  $\mathcal{C}$  on a  $\mathcal{C}(a) \leq \mathcal{C}(\theta)$  et puisque  $a \in J$  alors  $a \leq \mathcal{C}(\theta)$  pour tout  $a \in J$ . D'où par passage à la réunion,  $\theta \leq \mathcal{C}(\theta)$ . Ainsi  $\theta \in J$ . En posant  $\delta := \mathcal{C}(\theta)$  et en utilisant la croissance de  $\mathcal{C}$ , on montre comme plus haut que  $\theta = \mathcal{C}(\theta)$ . L'élément  $\theta$  est le plus grand point fixe. En effet, soit  $\lambda$  tel que  $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$ . En particulier  $\lambda \in J$  et donc  $\lambda \leq \theta$ .

• **Conclusion :** On a au final démontré que  $\omega = \mathcal{C}(\omega) \leq \theta = \mathcal{C}(\theta)$  et tout autre point fixe  $\lambda$  vérifie  $\omega \leq \lambda \leq \theta$ . □

**Remark 1.** Le théorème de Knaster-Tarski a une application au théorème de Cantor-Bernstein (voir [8]) qui est bien connue.

## 4 Existence et unicité de la substance de Spinoza.

On énonce maintenant les résultats principaux de cette note, les propositions qui confirment les thèses proposées par Spinoza dans les Propositions XI, XII, XIII et XIV de *l'Ethique*.

### 4.1 Existence de la Substance.

Par la proposition qui suit, on montre qu'il existe nécessairement une chose qui est cause de soi.

**Proposition 3.** *Supposons que les axiomes (A1) et (A2) sont satisfaits. Alors, il existe une chose  $S$  dans le monde de l'existant, distincte de  $e$ , indépendante du temps et contenant la cause de  $e$  telle que :*

$$\mathcal{C}(S) = S,$$

*autrement dit  $S$  est cause de soi ou encore, qu'il appartient à la nature de  $S$  d'exister. Tout autre substance  $\Lambda$  contiendrait  $S$ .*

*Preuve :* (1) Grâce aux axiomes (A1) et (A2), on a que la loi de causalité  $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \rightarrow \mathcal{P}(E_t)$  est bien une application croissante, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Comme  $\mathcal{P}(E_t)$  est un Treillis complet, il existe par le Lemme 1 un plus petit point fixe  $S_t \in \mathcal{P}(E_t)$  i.e. telle que  $\mathcal{C}(S_t) = S_t$  et un plus grand point fixe  $D_t = \mathcal{C}(D_t)$ . Tout autre point fixe  $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$  satisfait  $S_t \subset \Lambda \subset D_t$ .

*Indépendance du temps :* En effet pour  $t < t'$ , on a que  $E_t \subset E_{t'}$  et donc aussi  $\mathcal{P}(E_t) \subset \mathcal{P}(E_{t'})$ . Comme on vient de le montrer, il existe un plus petit et un plus grand point fixe  $S_t, D_t \in \mathcal{P}(E_t)$  ainsi qu'un plus petit et un plus grand point fixe  $S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$ . D'une part, comme  $\mathcal{P}(E_t) \subset \mathcal{P}(E_{t'})$ , on se trouve donc avec les points fixes  $S_t, D_t, S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$ . Ainsi, puisque  $S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$  sont respectivement le plus petit et le plus grand point fixe on obtient que

$$S_{t'} \subset S_t \subset D_t \subset D_{t'}.$$

Il s'en suit que  $S_{t'}$  existe aussi avant  $t$  i.e.  $S_{t'} \in \mathcal{P}(E_t)$ , puisque  $S_{t'}$  est contenue dans  $S_t$ . Or dans  $\mathcal{P}(E_t)$ , le plus petit point fixe étant  $S_t$ . Tout autre point fixe de  $\mathcal{P}(E_t)$  envelopperait  $S_t$ . Autrement dit on a aussi que

$$S_t \subset S_{t'}.$$

Donc,  $S_t = S_{t'}$ . Ceci signifie que  $S = S_t (\forall t \in \mathbb{R})$  est indépendante du temps. Comme  $e \subset S$  alors par l'axiome (A2) on a que  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S$  et par la Proposition 1 on a que  $S \neq e$ . □

Comme je l'ai déjà mentionné dans l'introduction, on peut déduire directement l'unicité de la substance  $S$  à partir de la Proposition 3 si on admet (comme le fait Spinoza dans la Proposition II de *l'Ethique*) que deux substances différentes ne doivent rien avoir en commun. Car effectivement chacune doit être cause de soi et exister par soi. Mais comme toutes les substances, d'après la Proposition 3, ont la substance  $S$  en commun c'est qu'il n'existe au final qu'une et une seule substance qui est  $S$ . Cependant, comme je l'ai déjà expliqué, on peut admettre l'axiome (A3) pour que la preuve de l'unicité de la substance soit encore plus mathématique. C'est ce que je ferai dans la section qui suit.

## 4.2 Unicité et indivisibilité de la Substance.

Pour voir que la Substance est nécessairement unique nous allons utiliser l'axiome (A3).

(A3) Toute partie non vide d'une substance doit envelopper une cause. Autrement dit, si  $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) est telle que  $\mathcal{C}(\Lambda) = \Lambda$ , alors pour tout  $\emptyset \neq A \subset \Lambda$  il existe au moins une chose  $B \subset E_t$  telle que  $\mathcal{C}(B) \subset A$ .

**Proposition 4.** *Supposons que les axiomes (A1), (A2) et (A3) sont satisfaits. Alors, il existe une unique substance  $S$  distincte de  $e$  dans le monde de l'existant.*

*Démonstration.* L'existence est assurée par la Proposition 3. Soit  $t \in \mathbb{R}$  quelconque. Supposons que  $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$  soit une substance i.e.  $\mathcal{C}(\Lambda) = \Lambda$ . Par la Proposition 3, on a que  $S \subset \Lambda$ . Supposons que  $\Lambda \setminus S \neq e := \emptyset$  (le complémentaire de  $S$  dans  $\Lambda$ ). Par l'axiome (A3), il existe  $B \subset E_t$  tel que  $\mathcal{C}(B) \subset \Lambda \setminus S$ . Or  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(B)$  et  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S$  par la Proposition 2. Ceci entraîne que  $\mathcal{C}(e) \subset S \cap (\Lambda \setminus S) = e$ . Autrement dit,  $\mathcal{C}(e) = e$ , ce qui est absurde par la Proposition 1. Donc on a bien que  $\Lambda \setminus S = e$ , autrement dit que  $\Lambda = S$ . D'où l'unicité de la substance. □

On montre maintenant l'indivisibilité de la substance.

**Proposition 5.** *Supposons que les axiomes (A1), (A2) et (A3) sont satisfaits. Alors, il existe une unique Substance  $S \neq e$  dans le monde de l'existant, indépendante du temps telle que :*

(1) *pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E_t = N_t \cup \{S\}$ . Autrement dit, les êtres de l'existence sont ou bien en soi et c'est l'unique substance  $S$  ou bien en autre chose que soi et dans ce cas ce sont les éléments de  $N_t$ .*

(2)  *$S$  est indivisible, c'est-à-dire que  $S$  ne se décompose pas en deux parties disjointes. Autrement si  $S = S_1 \cup S_2$  alors  $S = S_1$  ou  $S = S_2$ .*

(3)  *$S = \mathcal{C}(e)$ . La Substance  $S$  est donc exactement la cause de la diversité des êtres (Voir le paragraphe sur le sens de  $e$  dans la section 2 et la Proposition 1).*

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de la Substance ainsi que son indépendance par rapport au temps, est assurée par la Proposition 4.

(1) pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $S$  est l'unique chose qui est cause de soi, toute autre chose de  $E_t$  ne contenant pas  $S$  est donc dans  $N_t$  par la définition de  $N_t$ . Il suit donc que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E_t = N_t \cup \{S\}$ .

(2) Supposons que  $S$  est divisible, autrement dit qu'il existe  $S_1 \neq e$  et  $S_2 \neq e$  tel que  $S = S_1 \cup S_2$  et  $S_1 \cap S_2 = e := \emptyset$ . Comme  $S$  est une substance, par l'axiome (A3), il existe  $B_1 \subset S$  et  $B_2 \subset S$  tel que  $\mathcal{C}(B_1) \subset S_1$  et  $\mathcal{C}(B_2) \subset S_2$ . Par la Proposition 2, on déduit que  $\mathcal{C}(e) \subset (\mathcal{C}(B_1) \cap \mathcal{C}(B_2)) \subset S_1 \cap S_2 = e$ . Ceci entraîne que  $\mathcal{C}(e) = e$  ce qui est absurde par Proposition 1. D'où  $S$  est indivisible.

(3) Par la Proposition 2 on a que  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S$ . D'autre part, par le point (2),  $S$  est indivisible et comme  $e \neq \mathcal{C}(e)$  par la Proposition 1, alors  $\mathcal{C}(e) = S$ .  $\square$

On appellera "Cause première", la cause contenue dans toutes les causes.

**Corollary 1.** *La substance  $S$  est cause première de toute chose et elle est éternelle.*

*Démonstration.* Soit une chose  $A \subset E_t$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Par la Proposition 2, on a que  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$ . Par la Proposition 5 on a que  $\mathcal{C}(e) = S$ . Donc la substance  $S$  est contenue dans toutes les causes. Elle est donc cause première de toute chose. Par ailleurs,  $S$  est cause de soi et est indépendante du temps par la Proposition 3, elle est donc éternelle.  $\square$

En suivant la définition II de *l'Ethique* ci-dessous, on déduit aisément l'infinité de la substance  $S$ .

**Definition 1.** *Une chose est dite finie en son genre quand elle peut être bornée par une autre chose de même nature. Par exemple, un corps est dit chose finie, parce que nous concevons toujours un corps plus grand ; de même, une pensée est bornée par une autre pensée ; mais le corps n'est pas borné par la pensée, ni la pensée par le corps.*

**Corollary 2.** *L'unique substance  $S$  est nécessairement infini.*

*Démonstration.* Cela découle de la définition ci-dessus puisqu'il n'y a pas d'autre substance de même nature que  $S$  pour la contenir.  $\square$

## 5 Conclusion.

Comme je l'ai mentionné à la fin de l'introduction, la démarche qui a été suivie dans cette note consistait en le fait de partir de la diversité des êtres pour aboutir via un modèle mathématique à l'unicité de la substance. Il a été prouvé par ailleurs que la substance est indivisible, infini, éternelle et quel est cause première de toute chose. Il serait donc bien intéressant maintenant de faire le chemin inverse, c'est-à-dire, de partir de la substance elle-même dont on a prouvé l'existence et l'unicité pour comprendre dans quel mesure le modèle proposé ici permet d'expliquer le cheminement causal qui part de cette substance et aboutit sur la diversité des êtres. Ceci permettrait sans doute de voir si la suite des affirmations de Spinoza dans *l'Ethique* reste valide. Mais cette tâche n'a pas été abordée dans cette note pour éviter toute spéculation non mathématique. Je vais m'arrêter sur cette conclusion, que les premières affirmations de Spinoza que l'on trouve dans *l'Ethique* (Je parle uniquement de ce que j'ai abordé ici) ont été confirmées et démontrées dans cette note par une approche rigoureusement mathématique. On peut donc probablement encore dire comme l'a titré Antonio Damasio dans l'un de ses livres (voir [3]) que : Spinoza avait raison.

## Références

- [1] G. Boole, *Les Lois de la pensée*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, coll. " Mathesis ", 1992 (ISBN 978-2-7116-1062-4, présentation en ligne [archive])
- [2] R. Caillois, M. Francès et R. Misrahi, *Oeuvres Complètes* (B. Spinoza), Gallimard, (1984).
- [3] A. R. Damasio *Spinoza avait raison. Joie et tristesse, le cerveau des émotions* Odile Jacob (2003).
- [4] Y. N. Moschovakis, *Notes on Set Theory*, Springer, (1994)
- [5] B. Knaster. *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. 6 (1928), 133-134.
- [6] D. Parrochia, *La raison systématique : Essais de morphologie des systèmes philosophiques*, Librairie philosophique J. Vrin | Mathesis (2000).
- [7] A. Tarski. *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), 285-309.
- [8] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème-de-Cantor-Bernstein>