



**HAL**  
open science

# La Substance de Spinoza ou la Nature comme Treillis. Une histoire de point fixe.

Mohammed Bachir

► **To cite this version:**

Mohammed Bachir. La Substance de Spinoza ou la Nature comme Treillis. Une histoire de point fixe.. 2016. hal-01420747v1

**HAL Id: hal-01420747**

**<https://paris1.hal.science/hal-01420747v1>**

Preprint submitted on 22 Dec 2016 (v1), last revised 11 Mar 2018 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La Substance de Spinoza ou la Nature comme Treillis. Une histoire de point fixe.

Par Mohammed Bachir en hommage à Baruch de Spinoza.

15/12/2013

*Laboratoire SAMM 4543, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Centre P.M.F.  
90 rue Tolbiac 75634 Paris cedex 13*

*Email : Mohammed.Bachir@univ-paris1.fr*

**Résumé :** On propose un modèle mathématique basé sur deux axiomes et la théorie des ensembles pour approcher la problématique développée par le philosophe B. Spinoza, dans *l'Ethique*. On utilise ensuite le Théorème de Knaster-Tarski pour démontrer l'existence et l'unicité de la Substance affirmée par Spinoza.

## 1 Introduction

Vers 1661, dans l'oeuvre de *l'Ethique* (Voir [2]), Baruch de Spinoza commence par définir la notion de "cause de soi" et celle de "substance". Par "cause de soi" il entend, ce dont l'essence enveloppe l'existence, ou encore ce dont la Nature ne peut être conçue qu'existante. Par substance, ce qui est en soi et est conçu par soi, autrement dit, ce dont le concept n'a pas besoin du concept d'une autre chose pour être formé. Il affirme ensuite qu'il appartient à la nature de la substance d'exister (Voir les définitions I et II ainsi que la Proposition 7 dans *l'Ethique* [2]). Le philosophe met en place sept axiomes sur lesquels il va s'appuyer tout le long de la première partie de l'oeuvre pour démontrer (selon ce qu'il appelle lui-même la méthode géométrique) l'existence et l'unicité d'une substance dans la Nature (Voir Proposition XI de *l'Ethique*). Autrement dit de l'existence d'une unique chose dans la Nature qui est cause de soi. Cependant, Spinoza est amené à aborder la notion de substance via ses attributs. Le seul moyen pour lui de percevoir la substance par l'entendement. Quoique le raisonnement qu'on trouve dans *l'Ethique* est souvent rigoureux et l'intuition est profonde, certaines preuves présentent néanmoins quelques lacunes à certains endroits comme le démontre George Boole dans son oeuvre "les lois de la pensée" (voir [1]). Ces difficultés s'expliquent à mon sens en deux points :

1. la première difficulté est dû au fait de raisonner directement sur la Substance qui par définition échappe à l'entendement et pousse à s'accrocher aux attributs de la Substance, ce qui peut induire des erreurs et des confusions.

2. la seconde difficulté est dû à l'absence d'une théorie mathématique des ensembles à cette époque. Même si on trouve déjà dans l'argumentation de Spinoza une distinction entre deux types d'infini : "*l'infini en son genre*" et "*l'absolument infini*", la théorie des ensembles n'avait pas pour autant démarré. Notons au passage que c'est à Georg Cantor que l'on doit, deux siècles plus tard vers 1874, les premières bases de la théorie des ensembles. Voici un passage de *l'Ethique* (Voir Page 324 dans [2]) où Spinoza critique ses adversaires. Ce passage montre clairement que la théorie des ensembles et la notion d'ordinaux n'étaient pas encore au point mais faisaient, toutefois, partie des débats :

*"Si la substance corporelle, disent-ils, est infinie, qu'on la conçoit divisée en deux parties : chaque partie sera ou finie ou infinie. Si chaque partie est finie, l'infini se compose donc de deux parties finies, ce qui est absurde. Si chaque partie est infinie, il y a donc un infini deux fois plus grand qu'un autre infini, ce qui est également absurde. En outre, si une quantité infinie est mesurée en parties valant chacune un pied, elle devra consister en une infinité de telles parties; et de même, si elle est mesurée en parties valant chacune un pouce; par suite, un nombre infini sera douze fois plus grand qu'un autre nombre infini..."*

La présente note trouve sa source d'inspiration dans l'oeuvre de *l'Ethique*. Ayant constaté que le raisonnement de Spinoza s'appuie en partie sur des concepts ensemblistes, je propose dans ce qui suit un modèle mathématique simple issu de la théorie des ensembles et basé sur deux axiomes sur la loi de la causalité (en dehors des axiomes classiques de la théorie des ensembles) qui approche la problématique de Spinoza (Voir Section 2). Cependant, contrairement à Spinoza, j'appelle "*Nature*"  $N_t$  à un instant  $t$ , uniquement l'univers de toutes les choses qui existent ou ayant existé avant l'instant  $t$  par des causes qui se trouvent en dehors d'elles même (un principe fondamentale de la physique). Je défini ensuite formellement  $E_t$  comme étant l'ensemble de toutes les choses existantes ou ayant existé avant l'instant  $t$ , englobant ainsi éventuellement les choses qui coïncideraient avec leur propres causes si toutefois ces choses là seraient amenés à exister. Evidemment, on a toujours que  $N_t$  est une partie de  $E_t$ , pour tout instant  $t$ . La première question qui se pose donc est la suivante : A-t-on que  $E_t = N_t$  ou bien  $N_t$  est strictement inclus dans  $E_t$ ? Je démontrerai en m'appuyant sur ces deux axiomes, qu'il existe nécessairement une unique chose non vide  $S$  dans  $E_t$  qui existe par soit. Autrement dit, une unique chose qui est cause de soit, c'est-à-dire dont l'existence et la cause ne font qu'un. Il appartient donc à la nature de cette chose d'exister : C'est la Substance de Spinoza. Je prouverai à la même occasion que  $S$  est indépendante du temps et que pour tout instant  $t$  on ait en

fait  $E_t = N_t \cup \{S\}$ . Notons, que dans les Proposition XII et XIII de *l'Ethique*, Spinoza affirme que la substance est indivisible. Il sera aussi prouvé dans cette note que  $S$  est effectivement indivisible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose pas en deux (ou plusieurs) parties disjointes (Voir Proposition 6 en Section 4).

Il est à noter que la Substance  $S$  établis dans cette note, apparaît comme transcendante la Nature  $N_t$  à chaque instant  $t$ , alors que chez Spinoza la notion de Nature doit plutôt coïncider avec  $E_t$  à chaque instant  $t$ . Il est à noter aussi que contrairement à Spinoza qui cherche à connaître la substance par son essence et ses attributs, on ne prétend pas dans cette note d'expliquer de quoi est faite cette Substance. Il est uniquement question de prouver formellement et grâce à des outils mathématiques qu'elle existe et qu'elle est unique. L'idée est quelque peu similaire à l'exemple suivant : dans un langage fini (un dictionnaire par exemple) où l'on admet que tout mot doit avoir une définition unique, il est alors nécessaire qu'il y ait au moins un mot qui est sa propre définition s'il l'on veut éviter de définir un premier mot par un deuxième et puis ce même deuxième par le premier.

La preuve que j'apporterai reposera sur le théorème de Knaster-Tarski qui est un résultat mathématique de la théorie des points fixes dû aux mathématiciens, Knaster [4] (1928) et Tarski [5] (1955). Ce résultat est également attribué par Y. N. Moschovakis [3] à Zermelo. L'intérêt de l'approche développée dans cette note, c'est qu'elle permet de revisiter *l'Ethique* de Spinoza via les mathématiques moderne que l'époque de Spinoza ignorait, tout en confirmant les thèses soutenues par ce dernier dans les Proposition XI, XII et XIII de *l'Ethique*.

## 2 Une modélisation mathématique.

Commençons par modéliser le temps par la droite réelle noté  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 Quelques notations et définitions.

Pour chaque instant  $t \in \mathbb{R}$  arbitrairement fixé :

- on appelle cause d'une chose  $A$ , la chose qui a fait ou qui fait que  $A$  a existé.
- on dit qu'une chose a une cause en dehors d'elle même, si cette chose ne coïncide pas avec sa cause.
- on note  $N_t$  la Nature avant l'instant  $t$ , autrement dit l'ensemble de toute chose ayant existé avant l'instant  $t$  et ayant une cause bien déterminée en dehors d'elle même (i.e une cause qui ne coïncide pas avec elle même).
- on note  $E_t$  l'ensemble de toute chose existante avant l'instant  $t$ . On a que  $N_t \subset E_t$  pour tout  $t$ .
- on note  $e$  la chose commune à tout ce qui existe. Autrement dit, la chose

comune à toute chose de  $E_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  c'est-à-dire

$$e := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcap_{A \in \mathcal{P}(E_t)} A.$$

Cette ensemble  $e$  est appelé en mathématique l'ensemble vide et est noté  $\emptyset$ . Cependant, nous gardons pour l'instant la notation  $e$  au lieu de  $\emptyset$ , mais nous précisons que  $e$  a les mêmes propriétés que  $\emptyset$ . Quelques remarques à cet égard seront donnée dans la sous-section 4.2.

- par  $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$  on désigne l'ensemble de toutes les parties de  $E_t$  muni de l'ordre de l'inclusion.

- on note  $\mathcal{C}(A)$  la cause bien déterminée de  $A$ , pour tout  $A \in \mathcal{P}(E_t)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Cette loi de causalité  $\mathcal{C}$  est indépendante du temps.

- on appelle substance toute chose de  $E_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) qui coïncideraient avec sa propre cause, si toutefois une telle chose existe.

- on note par  $E$ , le monde de l'existant c'est-à-dire  $E = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} E_t$ .

On rappelle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$  est un treillis complet (et même une algèbre de Boole complète) qui admet un plus petit élément  $e$  et un plus grand élément  $E_t$ . L'introduction de l'ensemble  $\mathcal{P}(E_t)$  se justifie par les passages suivant que l'on trouvera dans *l'Ethique* [2] pages 315-316 :

1. *Que la vraie définition de chaque chose n'enveloppe et n'exprime rien à part la nature de la chose définie. D'où il suit :*

2. *Que nulle définition n'enveloppe et n'exprime aucun nombre déterminé d'individus, puisqu'elle n'exprime rien d'autre que la nature de la chose définie. Par exemple, la définition du triangle n'exprime rien d'autre que la simple nature du triangle, mais non quelque nombre déterminé de triangles.*

3. *Il faut noter que, de chaque chose existante, il est nécessairement donné quelque cause déterminée, par laquelle elle existe.*

4. *Il faut enfin noter que cette cause par laquelle certaine chose existe doit, ou bien être contenue dans la nature même et la définition de la chose existante (parce que, en effet, il appartient à sa nature d'exister), ou bien être donnée en dehors d'elle.*

*Cela posé, il suit que, s'il existe dans la Nature quelque nombre déterminé d'individus, une cause doit nécessairement être donnée pourquoi ces individus existent, et pourquoi ni un plus grand nombre ni un plus petit.*

Ce dernier passage exprime le fait que les causes respectives de deux individus  $\{a\}$  et  $\{b\}$ , n'enveloppent pas la cause de la paire d'individu  $\{a, b\}$ . Autrement dit, il est possible que  $\mathcal{C}(\{a\}) \cup \mathcal{C}(\{b\}) \subset \mathcal{C}(\{a, b\})$  mais que  $\mathcal{C}(\{a, b\}) \neq \mathcal{C}(\{a\}) \cup \mathcal{C}(\{b\})$ . Il fallait donc prendre en considération l'ensemble des parties des choses existantes, ce qui a motivé l'introduction de  $\mathcal{P}(E_t)$ . Il faut aussi noter que si deux choses n'ont rien en commun entre elles, c'est qu'il y'a une cause non vide et bien déterminé à cela. Ceci explique entre autre pourquoi la cause du vide ne peut pas être vide.

## 2.2 Deux axiomes.

On introduit maintenant les deux axiomes qu'on utilisera.

**Axiomes.** (Voir aussi pour comparaison, les sept axiomes du début de *l'Ethique* [2].)

(A1) Toute chose existante est l'effet d'une cause bien déterminée et l'effet ne peut pas précéder sa cause. Autrement dit, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $A \in \mathcal{P}(E_t)$ , il existe une cause unique  $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{P}(E_t)$  (voir aussi l'axiome I de *l'Ethique*).

*Explication :* C'est un principe fondamental de la physique.

(A2) Pour deux choses existantes, si l'une enveloppe l'autre alors la cause de la première enveloppe la cause de la seconde. Autrement dit : pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $A, B \in \mathcal{P}(E_t)$ , si  $A \subset B$  alors  $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$  (cette axiome ne se trouve pas dans *l'Ethique*).

*Explication :* Lorsqu'une chose est considérée comme composée de plusieurs parties, sans chacune des parties le tout ne peut pas exister. Donc la cause d'une partie est contenue dans la cause du tout. Par exemple, la cause d'une page d'un livre fait partie de la cause du livre vu que sans ses pages, le livre ne peut exister.

## 2.3 Quelques propositions immédiates.

On déduit immédiatement des définitions et axiomes ci-dessus les propositions suivantes.

**Proposition 1.** *La cause de  $e$  ne peut pas être  $e$ , c'est-à-dire  $\mathcal{C}(e) \neq e$ .*

*Proof.* Par définition  $e := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcap_{A \in E_t} A$ , ce qui est commun à tout ce qui existe, en particulier à tout les partie de  $N_t$ . Or par définition,  $N_t$  contient les choses dont les causes sont en dehors d'elles mêmes c'est-à-dire dont les cause ne coïncide pas avec elle même. La cause de  $e$  ne doit donc pas coïncider avec  $e$  (voir d'autre argument dans la sous-section 4.2). □

**Proposition 2.** *Supposons que l'axiome A2 est satisfait. Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $A \in \mathcal{P}(E_t)$ . Alors,  $e \neq \mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$ . Autrement dit, la cause de ce qui est en commun (c'est-à-dire la cause de  $e$ ) est contenu dans toutes les causes.*

*Proof.* La preuve découle immédiatement de l'axiome A2 et la Proposition 1. □

**Proposition 3.** *Supposons que l'axiome A1 est satisfait. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $A \in \mathcal{P}(E_t)$ , alors  $\mathcal{C}(A) \subset E_t$ . En particulier,  $\mathcal{C}(E_t) \subset E_t$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Proof.* Par l'axiome A1, l'effet ne peut pas précéder sa cause, donc nécessairement  $\mathcal{C}(A) \subset E_t$ , vu que  $E_t$  est l'ensemble de toute chose existante avant l'instant  $t$ .  $\square$

### 3 Le théorème de Knaster-Tarski.

On rappelle ci-dessous quelques notions bien connues.

**Treillis :** Un treillis  $(T, \leq)$  est la donnée d'un ensemble  $T$  et d'une relation noté  $\leq$  (appelée ordre partiel) satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1)  $\forall x \in T, x \leq x$ .
- (2)  $\forall x, y \in T$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq x$  alors  $x = y$ .
- (3)  $\forall x, y, z \in T$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$ .

**Treillis complet :** Un treillis complet  $(T, \leq)$  est un treillis pour lequel toute partie  $A$  de  $T$  admet une borne supérieur noté  $\sup(A) \in T$  et une borne inférieur noté  $\inf(A) \in T$ . Autrement dit:

- (i)  $\forall a \in A, a \leq \sup(A)$  (respectivement  $\inf(A) \leq a$ ),
- (ii) s'il existe  $M \in T$  tel que  $\forall a \in A, a \leq M$  alors  $\sup(A) \leq M$  (respectivement s'il existe  $m \in T$  tel que  $\forall a \in A, m \leq a$  alors  $m \leq \inf(A)$ )

**Exemple :** Soit  $E$  un ensemble non vide et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Alors  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  est un treillis complet, où  $\subset$  désigne l'inclusion.

On rappelle ci-dessous le théorème de Knaster-Tarski.

**Lemma 1. (Knaster-Tarski)** *Soit  $(B, \leq)$  un Treillis complet et  $\mathcal{C} : B \rightarrow B$  une application croissante pour l'ordre  $\leq$ . Alors,*

- (1) *il existe  $\omega, \theta \in B$  tel que :*

$$\mathcal{C}(\omega) = \omega, \quad \mathcal{C}(\theta) = \theta$$

*et pour tout ensemble  $\lambda \in B$  tel que  $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$  on a*

$$\omega \leq \lambda \leq \theta.$$

- (2) *Pour tout  $a \in B$ , si  $\mathcal{C}(a) \leq a$  alors  $\omega \leq a$  i.e  $a$  est plus grand que le plus petit point fixe. De même si  $a \leq \mathcal{C}(a)$  alors  $a \leq \theta$  i.e  $a$  est plus petit que le plus grand point fixe.*

*Preuve.* Partie (1) :

- **Le plus petit point fixe :** Posons  $I := \{a \in B : \mathcal{C}(a) \leq a\}$ . Comme  $B$  est

un Treillis, il contient l'élément  $\omega := \inf(I)$ . Comme  $\omega \leq a$  pour tout  $a \in I$ , la croissance de  $\mathcal{C}$  entraîne que  $\mathcal{C}(\omega) \subset \mathcal{C}(a)$  et comme  $a \in I$  alors  $\mathcal{C}(\omega) \leq a$  et ceci pour tout  $a \in I$ , il s'ensuit que  $\mathcal{C}(\omega) \leq \inf(I) = \omega$ . On conclut que  $\omega \in I$ . Posons maintenant  $\varpi := \mathcal{C}(\omega)$ . On a donc  $\varpi \leq \omega$ . La croissance de  $\mathcal{C}$  entraîne que  $\mathcal{C}(\varpi) \leq \mathcal{C}(\omega) := \varpi$ . D'où  $\varpi \in I$ . Puisque  $\omega$  est le plus petit élément de  $I$  alors  $\omega \leq \varpi$ . Comme on avait déjà établi l'inégalité inverse alors  $\varpi = \omega$  c'est-à-dire  $\mathcal{C}(\omega) = \omega$ . D'où l'existence d'un point fixe. Soit maintenant un élément  $\lambda \in B$  tel que  $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$ . On a en particulier que  $\lambda \in I$  et donc  $\omega \leq \lambda$ . L'élément  $\omega$  est donc le plus petit point fixe de  $\mathcal{C}$ .

• **Le plus grand point fixe :** Soit maintenant  $J := \{a \in B : a \leq \mathcal{C}(a)\}$ . Comme  $B$  est un Treillis, il contient l'élément  $\theta := \sup(J)$ . Alors  $a \leq \theta$  pour tout  $a \in J$  et par la croissance de  $\mathcal{C}$  on a  $\mathcal{C}(a) \leq \mathcal{C}(\theta)$  et puisque  $a \in J$  alors  $a \leq \mathcal{C}(\theta)$  pour tout  $a \in J$ . D'où par passage à la réunion,  $\theta \leq \mathcal{C}(\theta)$ . Ainsi  $\theta \in J$ . En posant  $\delta := \mathcal{C}(\theta)$  et en utilisant la croissance de  $\mathcal{C}$ , on montre comme plus haut que  $\theta = \mathcal{C}(\theta)$ . L'élément  $\theta$  est le plus grand point fixe. En effet, soit  $\lambda$  tel que  $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$ . En particulier  $\lambda \in J$  et donc  $\lambda \leq \theta$ .

• **Conclusion :** On a au final démontré que  $\omega = g(\omega) \leq \theta = \mathcal{C}(\theta)$  et tout autre point fixe  $\lambda$  vérifie  $\omega \leq \lambda \leq \theta$ .

Partie (2) : C'est clair par les définitions de  $I$  et  $J$ . □

**Remark 1.** *Le théorème de Knaster-Tarski a une application au théorème de Cantor-Bernstein (voir [6]) qui est bien connue.*

## 4 Existence et unicité de la substance de Spinoza.

On énonce maintenant les résultats principaux de cette note, les propositions qui confirment les thèses proposées par Spinoza dans les Propositions XI, XII et XIII de *l'Ethique*.

### 4.1 Existence de la Substance.

Commençons par cette proposition qui montre qu'il existe nécessairement une chose qui est cause de soi.

**Proposition 4.** *Supposons que les axiomes (A1) et (A2) sont satisfaits. Alors, il existe une chose  $S \neq e$  dans le monde de l'existant, indépendante du temps i.e.  $S \subset E_t$  pour tout instant  $t \in \mathbb{R}$ , telle que :*

$$\mathcal{C}(S) = S,$$

*autrement dit  $S$  est cause de soit ou encore, qu'il appartient à la nature de  $S$  d'exister. Tout autre substance  $\Lambda$  contiendrait  $S$ .*

*Preuve :* (1) Grâce aux axiomes (A1) et (A2), on a que la loi de causalité  $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t)$  est bien une application croissante, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Comme

$\mathcal{P}(E_t)$  est un Treillis complet, il existe par le Lemme 1 un plus petit point fixe  $S_t \in \mathcal{P}(E_t)$  i.e. telle que  $\mathcal{C}(S_t) = S_t$  et un plus grand point fixe  $D_t = \mathcal{C}(D_t)$ . Tout autre point fixe  $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$  satisfait  $S_t \subset \Lambda \subset D_t$ . Par la Proposition 1 on a que  $S_t \neq e$ .

*Indépendance du temps* : En effet pour  $t < t'$ , on a que  $E_t \subset E_{t'}$  et donc aussi  $\mathcal{P}(E_t) \subset \mathcal{P}(E_{t'})$ . Comme on vient de le montrer, il existe un plus petit et un plus grand point fixe  $S_t, D_t \in \mathcal{P}(E_t)$  ainsi qu'un plus petit et un plus grand point fixe  $S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$ . D'une part, comme  $\mathcal{P}(E_t) \subset \mathcal{P}(E_{t'})$ , on se trouve donc avec les points fixes  $S_t, D_t, S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$ . Ainsi, puisque  $S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$  sont respectivement le plus petit et le plus grand point fixe on obtient que

$$S_{t'} \subset S_t \subset D_t \subset D_{t'}.$$

Il s'ensuit que  $S_{t'}$  existe aussi avant  $t$  i.e.  $S_{t'} \in \mathcal{P}(E_t)$ , puisque  $S_{t'}$  est contenue dans  $S_t$ . Or dans  $\mathcal{P}(E_t)$ , le plus petit point fixe étant  $S_t$ . Tout autre point fixe de  $\mathcal{P}(E_t)$  envelopperait  $S_t$ . Autrement dit on a aussi que

$$S_t \subset S_{t'}.$$

Donc,  $S_t = S_{t'}$ . Ceci signifie que  $S = S_t (\forall t \in \mathbb{R})$  est independant du temps.  $\square$

## 4.2 Quelques remarques sur l'ensemble vide et le "Néant".

Reprenons maintenant la définition de l'ensemble  $e$  :

$$e := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcap_{A \subset E_t} A.$$

Cette ensemble de part sa définition est contenu dans tout les ensembles. Les mathématiciens l'appel le vide et le note  $\emptyset := e$ . Cette ensemble a en particulier les propriétés suivantes (Rappelons que pour deux ensembles  $A$  et  $B$ , par  $A \setminus B$  on désigne le complémentaire de  $B$  dans  $A$ ):

(1) La chose  $e$  satisfait :  $e \setminus e = e$ . On peut interpréter cela en disant que lorsqu'on enlève tout ce qu'il y a dans  $e$  il reste encore  $e$ . Autrement dit  $e$  ne peut pas s'enlever.

(2) Pour tout ensemble  $A$  on a  $A \setminus A = e$ . On peut interpréter cela en disant que lorsqu'on enlève tout ce qu'il y a dans  $A$  il reste ce qui ne peut pas s'enlever c'est-à-dire  $e$ .

(3) La chose  $e$  a toutes les propriétés possibles qui n'enveloppent pas de contradictions (En topologie par exemple,  $e$  est à la fois ouvert, fermé et compact, il est aussi convexe etc).

Est-ce que maintenant l'ensemble  $e := \emptyset$  a-t-il quelque chose à voir avec ce qu'on entend habituellement par le vocabulaire "le vide" c'est-à-dire le "Neant" ou le "Rien"? Il est tout à fait possible de considérer que  $e$  n'est pas vide au sens " le Néant" (c'est-à-dire ce qui ne contient rien), tout en conservant les

axiomes mathématiques usuels le concernant. Il se peut que  $e$  à une existence réelle et non conventionnelle comme on le suppose. L'ensemble le plus riche de tout les ensembles a plus de raison d'exister que n'importe quel autre ensemble (voir un raisonnement similaire concernant la substance dans le Scolie qui suit la Proposition XI dans [2]). Toujours est-il, de deux choses l'une :

- ou bien  $e$  n'est pas le Néant ou le "Rien" mais plutôt quelque chose qui a une réelle existence et qui est commune à tout ce qui existe même si elle est appelé le vide. Le vocabulaire et le sens qu'on y met serait alors trompeur.

- ou bien  $e$  est le Néant autrement dit, est quelque chose qui n'existe pas. Dans ce cas, la Substance  $S$  est forcément distincte de  $e$ , car si  $S = e$  c'est que  $S$  est le Néant est donc quelque chose qui n'existe pas, et dire que la cause de  $S$  est  $S$  c'est dire qu'il n'y a aucune cause pour que  $S$  existe c'est-à-dire aucune raison pour que le Néant existe. Autrement dit, le Néant n'existe pas. D'où la contradiction. Il est donc clair que  $S$  n'est pas le Néant. Il s'en suit que si le Néant existe c'est qu'il y a une cause bien déterminée à cela.

En fait, une cause ne peut jamais être le Néant. Le premier argument est le suivant : de par la définition même du Néant c'est qu'il est dépourvu de toute chose et donc dépourvu de toute cause. Ce qui est dépourvu de toute cause ne peut être une cause. Un deuxième argument est le suivant : supposons qu'il existe une chose disons  $A$  dont la cause  $\mathcal{C}(A)$  coïncide avec le Néant. Dire que la cause de  $A$  est le Néant c'est dire qu'il n'existe aucune cause réelle pour faire exister  $A$  c'est-à-dire que  $A$  n'existe pas. D'où  $A$  est le Néant, mais alors par ce qu'on viens de montrer juste plus haut cela est encore impossible. Il s'en suit qu'une cause ne peut jamais être le Néant.

### 4.3 Unicité de la substance.

Pour voir que la Substance est nécessairement unique nous allons détailler quelques points. Nous savons par la Proposition 4 que toute substance  $\Lambda$  contiendrait en elle la Substance  $S$  indépendante du temps. Cela peut suffire intuitivement pour dire que  $\Lambda$  et  $S$  sont en fait les mêmes. C'est en tout cas de la sorte que Spinoza procède dans l'Éthique puisqu'il affirme directement à partir de la seule définition de la Substance que (Voir Proposition II dans [2]) : "*Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien en communs entre elles.*"

D'un point de vu mathématique, une telle affirmation ne peut pas être affirmée si vite. Nous considérons donc que la Proposition II de Spinoza est en fait un axiome. Nous proposons l'axiome similaire suivant suivi de son explication :

(A3) Toute partie d'une substance doit envelopper une cause. Ce qui revient à dire, que toute partie d'une chose qui est cause de soi, doit contenir en elle la cause de quelque chose. Autrement dit, si  $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) est telle que

$\mathcal{C}(\Lambda) = \Lambda$ , alors pour tout  $\emptyset \neq A \subset \Lambda$  il existe au moins une chose  $B \subset \Lambda$  telle que  $\mathcal{C}(B) \subset A$ .

*Explication :* Une substance est par définition cause de soi. Admettons qu'il existe une partie de cette substance qui n'est cause d'aucune chose ni même d'elle-même. Cette partie serait donc causée par la partie complémentaire de la substance qui ne coïncide pas avec la totalité de la substance. Mais comme la première partie n'a aucun effet dans la substance, cette substance ne serait donc pas cause de soi mais serait plutôt causée par la deuxième partie strictement distincte d'elle. Ceci contredit la définition d'une substance.

**Proposition 5.** *Supposons que les axiomes (A1), (A2) et (A3) sont satisfaits. Alors, il existe une unique substance dans le monde de l'existant.*

*Proof.* L'existence est assurée par la Proposition 4. Soit  $t \in \mathbb{R}$  quelconque. Supposons que  $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$  soit une substance i.e.  $\mathcal{C}(\Lambda) = \Lambda$ . Par la Proposition 4, on a que  $S \subset \Lambda$ . Supposons que  $\Lambda \setminus S$  (le complémentaire de  $S$  dans  $\Lambda$ ) est différent de  $e := \emptyset$ . Par l'axiome (A3), il existe  $B \subset \Lambda$  tel que  $\mathcal{C}(B) \subset \Lambda \setminus S$ . Or  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(B)$  et  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S$  par l'axiome A2. Ceci entraîne que  $\mathcal{C}(e) \subset S \cap (\Lambda \setminus S) = e$ . Autrement dit,  $\mathcal{C}(e) = e$ . Comme  $S$  est la plus petite des substances, on a que  $S = e$ . Ceci est absurde car on sait par la Proposition 4 que  $S \neq e$ . Donc on a bien que  $\Lambda \setminus S = e$ , autrement dit que  $\Lambda = S$ . D'où l'unicité de la substance.  $\square$

**Proposition 6.** *Supposons que les axiomes (A1), (A2) et (A3) sont satisfaits. Alors, il existe une unique Substance  $S \neq e$  dans le monde de l'existant, indépendante du temps i.e.  $S \in E_t$  pour tout instant  $t \in \mathbb{R}$ , telle que :*

- (1) *pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E_t = N_t \cup \{S\}$ , c'est-à-dire que toute chose excepté  $S$  a une cause en dehors d'elle-même.*
- (2)  *$S$  est indivisible, c'est-à-dire que  $S$  ne se décompose pas en deux parties disjointes.*
- (3)  *$S = \mathcal{C}(\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \bigcap_{A \subset E_t} A) = \mathcal{C}(e) \neq e$ . La Substance  $S$  est donc exactement la cause de ce qui est en commun à tous ce qui existe.*

*Proof.* L'existence et l'unicité de la Substance ainsi que son indépendance par rapport au temps, est assurée par la Proposition 5.

(1) On sait que l'effet ne peut pas précéder sa cause, par l'axiome A1, on sait aussi que  $N_t$  est l'ensemble des choses existante avant  $t$  et qui ne coïncident pas avec leur causes et qu'il existe une unique chose dans  $E_t$  indépendante du temps qui coïncide avec sa cause. Vu que les choses existantes ont soit des causes qui les précèdent auquel cas elles seront dans  $N_t$  soit elles coïncident avec leur causes auquel cas c'est l'unique  $S$ . Il est donc clair que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E_t = N_t \cup \{S\}$ .

(2) Supposons que  $S$  est divisible, autrement dit qu'il existe  $S_1 \neq \emptyset$  et  $S_2 \neq \emptyset$  tel que  $S = S_1 \cup S_2$  et  $S_1 \cap S_2 = e := \emptyset$ . Comme  $S$  est une substance, par l'axiome (A3), il existe  $B_1 \subset S$  et  $B_2 \subset S$  tel que  $\mathcal{C}(B_1) \subset S_1$  et  $\mathcal{C}(B_2) \subset S_2$ .

Par la Proposition 2, on a que  $e \neq \mathcal{C}(e) \subset (\mathcal{C}(B_1) \cap \mathcal{C}(B_2)) \subset S_1 \cap S_2 = e$ . Ceci entraîne que  $\mathcal{C}(e) = e$  ce qui est absurde par Proposition 1. D'où  $S$  est indivisible.

(3) Etant donné que  $e \subset A$  pour tout  $A \subset E_t$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , en particulier  $e \subset S$ . Donc par la croissance de  $\mathcal{C}$ , on a  $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S$ . D'autre part, par le point (3),  $S$  est indivisible. D'où  $\mathcal{C}(e) = S$ .

□

## References

- [1] G. Boole, *Les Lois de la pensée*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, coll. "Mathesis ", 1992 (ISBN 978-2-7116-1062-4, présentation en ligne [archive])
- [2] R. Caillois, M. Francès et R. Misrahi, *Oeuvres Complètes* (B. Spinoza), Gallimard, (1984).
- [3] Y. N. Moschovakis, *Notes on Set Theory*, Springer, (1994)
- [4] B. Knaster. *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. 6 (1928), 133-134.
- [5] A. Tarski. *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), 285-309.
- [6] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème-de-Cantor-Bernstein>